

Ex 11.1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$f\left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = + \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} \text{ et pas } -\frac{16}{25} !$$

$$f\left(-\frac{11}{5}\right) = \left(-\frac{11}{5}\right)^2 = \left(-\frac{11}{5}\right) \times \left(-\frac{11}{5}\right) = + \frac{11^2}{5^2} = \frac{121}{25}$$

Ex 11.2

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{5}) = + (\sqrt{5})^2 = +5 \text{ et pas } -5 !$$

$$f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})(2\sqrt{3}) = 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 \times 3 = 12$$

$$f(-4\sqrt{5}) = (-4\sqrt{5})^2 = (-4\sqrt{5})(-4\sqrt{5}) = + 4 \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 16 \times 5 = 80$$

Ex 11.3

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$f(10^3) = (10^3)^2 = 10^{3 \times 2} = 10^6$$

$$f(10^{-5}) = (10^{-5})^2 = 10^{-5 \times 2} = 10^{-10}$$

$$f(8 \times 10^{-4}) = (8 \times 10^{-4})^2 = 8^2 \times (10^{-4})^2 = 8^2 \times 10^{-8} = 64 \times 10^{-8}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$f(2+\sqrt{5}) = (2+\sqrt{5})^2$$

⚠ identité remarquable. On m'a pas $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ mais $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

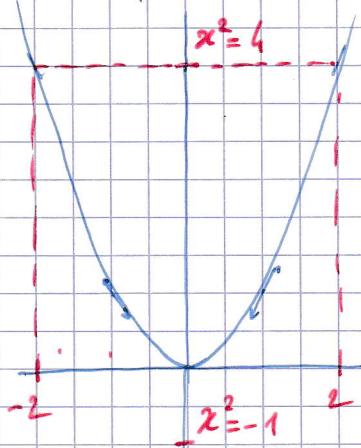
$$= 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$f(\sqrt{8}-\sqrt{6}) = (\sqrt{8}-\sqrt{6})^2 = \sqrt{8}^2 - 2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 8 - 2\sqrt{8 \times 6} + 6$$

$$= 14 - 2\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = 14 - 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} = 14 - 8\sqrt{3}$$

$$f(3-\sqrt{2}) = (3-\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

Ex 11.4



Graphiquement, $x^2=4$ a deux antécédents: -2 et 2.

En revanche, le nombre -1 n'a pas d'antécédent.

G 11.5

$$\begin{aligned}
 a) \left(\sqrt{\frac{24}{7}} \right)^2 &= \frac{24}{7} & \text{or} & \left(\sqrt{\frac{10}{3}} \right)^2 = \frac{10}{3} \\
 &= \frac{24 \times 3}{7 \times 3} & & = \frac{10 \times 3}{3 \times 3} \\
 &= \frac{72}{21} & & = \frac{10}{1}
 \end{aligned}$$

Or $\frac{10}{3} < \frac{72}{21}$ (images), i.e. $\left(\sqrt{\frac{10}{3}} \right)^2 < \left(\sqrt{\frac{24}{7}} \right)^2$

Donc, comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, les images sont classées dans le même ordre que les antécédents.

Donc $\sqrt{\frac{10}{3}} < \sqrt{\frac{24}{7}}$ (antécédents)

b) $\left(-\sqrt{\frac{11}{5}} \right)^2 = \frac{11}{5}$ (voir ex. 11.8)

$\left(-\sqrt{\frac{13}{6}} \right)^2 = \frac{13}{6}$

$\frac{11}{5} = \frac{11 \times 6}{5 \times 6} = \frac{66}{30}$ et $\frac{13}{6} = \frac{13 \times 5}{6 \times 5} = \frac{65}{30}$

Or $\frac{65}{30} < \frac{66}{30}$, donc $\left(-\sqrt{\frac{13}{6}} \right)^2 < \left(-\sqrt{\frac{11}{5}} \right)^2$

Comme la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, les images (ci-dessus) sont classées dans l'ordre inverse des antécédents.

Donc $-\sqrt{\frac{13}{6}} > -\sqrt{\frac{11}{5}}$.

G 11.6.

a) Lorsque $x \geq 3$, on travaille sur $\mathbb{R}^+$, où la fonction carré est strictement croissante. Donc $x^2 \geq 3^2$, i.e. $x^2 \geq 9$.

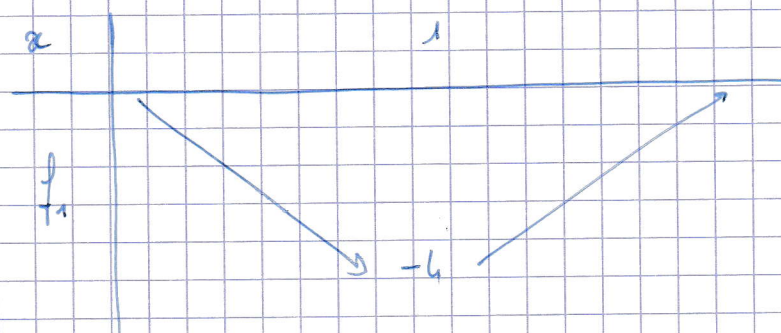
b) Lorsque $x \leq -1$, on travaille sur $\mathbb{R}^-$, où la fonction carré est strictement décroissante. Donc $x^2 \geq (-1)^2$, i.e. $x^2 \geq 1$.

c) Lorsque $-5 \leq x \leq -2$, on est sur $\mathbb{R}^-$, donc $25 \geq x^2 \geq 4$ (comme au b).

a) Le carré $(x-1)^2$ est multiplié par $3 > 0$, donc on a le même sens de variation que celui de la fonction carré. Le minimum est atteint par $x-1=0$, i.e. $x=1$.

Il vaut $f_1(1) = 3(1-1)^2 - 6 = 3 \times 0 - 6 = -6$

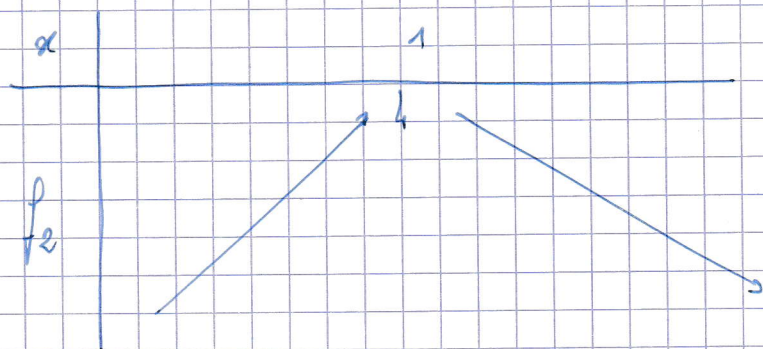
Il veut le tableau de variations suivant:



b) Le carré est multiplié par un négatif (-3), donc le sens de variation de f_2 sera l'inverse de celui de la fonction carré (croissant, puis décroissant).

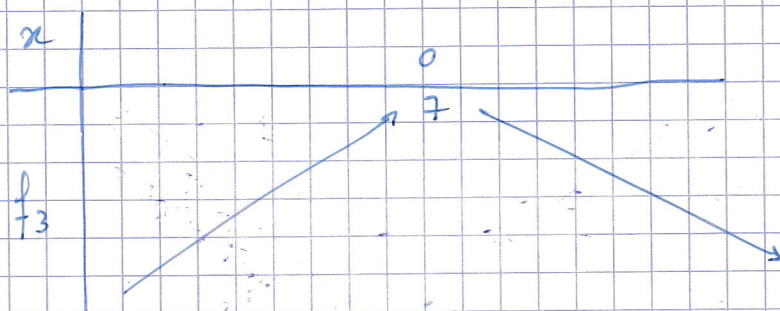
Le maximum est atteint par $x-1=0$, i.e. $x=1$. Il veut:

$$f_2(1) = 4 - 3 \times 0 = 4$$



c) Le carré est multiplié par un négatif.

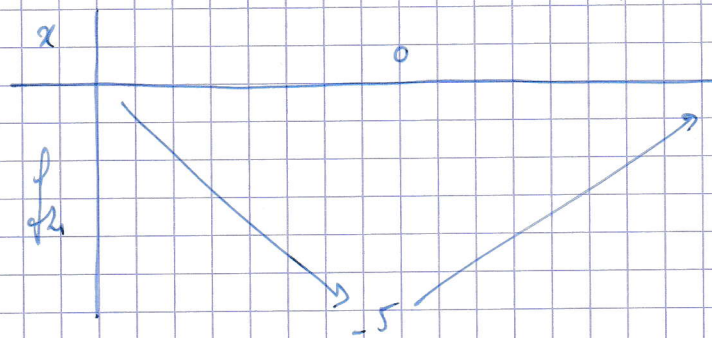
Maximum par $x=0$, avec $f_3(0) = -2 \times 0 + 7 = 7$



d) Le carré est multiplié par un positif.

11-6/8

Minimum pour $x=0$, avec $f_x(0) = -5$.



(On peut vérifier les traces de carré à la calculatrice).

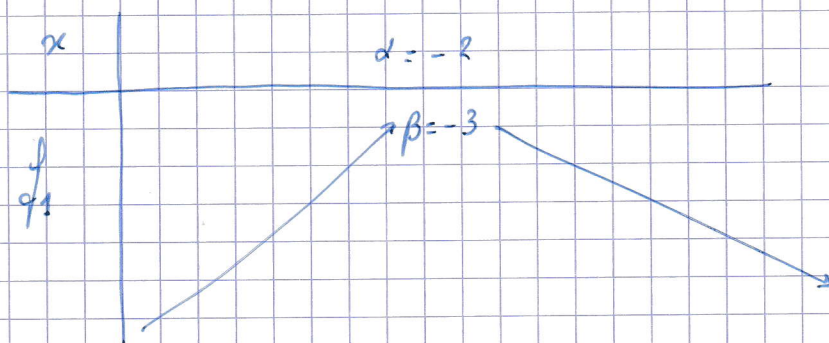
Ex 11.8 La parabole sera en forme de "cuvette" (c'est plus parlant que "parabole vers le haut"), comme la courbe représentative de la fonction carré, lorsque le coefficient qui multiplie le carré est positif.

A l'inverse, elle sera en forme de "colline" (c'est plus parlant que "parabole vers le bas") lorsque le coefficient qui multiplie le carré est negatif.

a) $f_1(x) = -(x+2)^2 - 3$, la courbe sera en forme de colline.

On a la ^{negatif} forme canonique $f_1(x) = (-1)(x - (-2))^2 + (-3)$
qui correspond à : $a(x - \alpha)^2 + \beta$

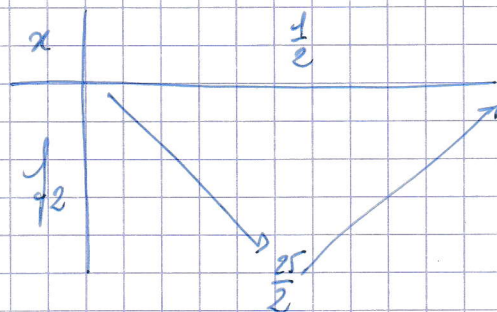
Donc le maximum est $\beta = -3$, et il est atteint pour $\alpha = -2$.



$$b) f_2(x) = \frac{25}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

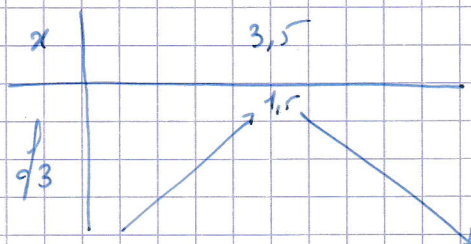
$$= \frac{2}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$

$$a \quad (x - \alpha)^2 + \beta$$



$$c) f_3(x) = -4(x - 3,5)^2 + 1,5$$

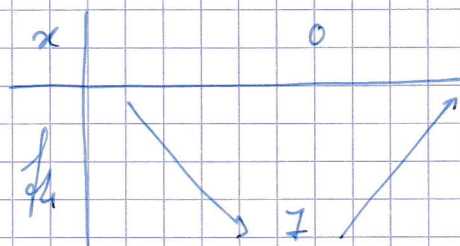
$$a \quad (x - \alpha)^2 + \beta$$



$$d) f_4(x) = 7 + x^2$$

$$= \frac{1}{1} (x - 0)^2 + 7$$

$$a \quad (x - \alpha)^2 + \beta$$



Ex 11.9 Cet exercice est sans doute le plus important du chapitre : savoir reconnaître les différentes formes de f et les utiliser à bon escient est une compétence explicitement attendue par le programme.

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 27 = 3(x - (-2))^2 + (-27) \quad \text{forme canonique}$$

$$a \quad (x - \alpha)^2 + \beta$$

$f_{\text{fact}} = 3(x-1)(x+5)$ est la forme factorisée

$f_{\text{dev}} = 3x^2 + 12x - 15$ est la forme développée.

1a) Calcul de $f'(x)$. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$

On utilise la forme factorisée pour obtenir une équation-produit.

$$3(x-1)(x+5) = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+5=0$$

$$x=1$$

$$x=-5$$

$$f^{-1}(0) = \{-5; 1\}$$

1°b) Calcul de $f^{-1}(\{15\})$. Il semble pertinent d'utiliser la forme dans laquelle apparaît "-15", i.e. la forme développée.

$$3x^2 + 12x - 15 = 15$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \quad (\text{équation produit})$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \quad \text{ou} \quad x+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4 \quad f^{-1}(\{15\}) = \{0; -4\}.$$

1°c) Calcul de $f^{-1}(\{-27\})$. De la même manière, on choisit la forme canonique, dans laquelle -27 apparaît.

$$3(x+2)^2 - 27 = -27$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \quad (\text{équation-produit})$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad f^{-1}(\{-27\}) = \{-2\}.$$

2°) Utilisons la forme canonique.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -30 \Leftrightarrow 3(x+2)^2 - 27 = -30$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)^2 = -3$$

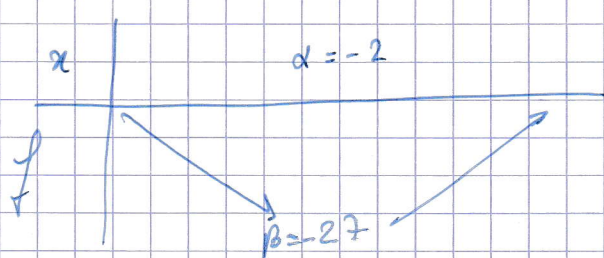
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = -1$$

caré négatif

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc -30 n'est pas d'atteinte par f .

3°) L'extremum s'obtient avec la forme canonique.

$$f(x) = 3(x+2)^2 - 27 = 3 \underbrace{(x - (-2))^2}_{\text{positif ("caré")}} + \underbrace{(-27)}_B$$



Le minimum de f est -27, et il est atteint par $x = -2$.

Q 11-10

a) $\alpha = 2$; $\beta = 3$ donc $f(x) = a(x-2)^2 + 3$ (f. canonique)
 De plus, $f(0) = -1$, donc $a(0-2)^2 + 3 = -1$
 $a \times 4 + 3 = -1$

$$4a = -4, \text{ donc } a = -1$$

Il Finalement, $f(x) = -(x-2)^2 + 3$.

b) La forme factorisée d'un polynôme de second degré est,
 si ce polynôme admet deux racines* x_1 et x_2 ,
 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

où a est le coefficient dominant (coefficient de x^2) et x_1, x_2 les deux racines*.

* Une racine d'un polynôme est une valeur qui annule ce polynôme.
 Ici, ce sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

D'après l'énoncé, $f(-2) = 0$ (point A) et $f(1) = 0$ (point B).

Donc les deux racines sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

Ainsi, $f(x) = a(x - \underbrace{-2}_{x_1})(x - \underbrace{1}_{x_2})$
 $= a(x+2)(x-1)$

or (point C) $f(0) = 2$.

Donc $a(0+2)(0-1) = 2$

$$-2a = 2, \text{ donc } a = -1$$

Il Finalement, $f(x) = -(x+2)(x-1)$
 $= -(x^2 - x + 2x - 2) = -x^2 - x + 2$

Pour cette question,
 on peut aussi
 travailler par symétrie,
 comme au c).

ci-dessus.

c) L'axe de symétrie de la parabole passe par le sommet
 $(\alpha; \beta)$ de celle-ci, donc ici $\alpha = 1$.

Ainsi, $f(x) = a(x-1)^2 + \beta$

Or $f(0) = 0$ (cf. point A) et $f(3) = 1$.

$$f(0) = a(0-1)^2 + \beta$$

$$0 = a + \beta$$

$$\text{Et } f(3) = a(3-1)^2 + \beta$$

$$1 = a \times 2^2 + \beta$$

$$1 = 4a + \beta$$

À résoudre le système
$$\begin{cases} 0 = a + \beta \\ 1 = 4a + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -a \\ 4a - a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -a \\ 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

|| Donc $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{3}$.

Ex 11.11.

$$\begin{aligned} a) \quad 0,58(T-100)^2 + 200 &= 0,58(T^2 - 2 \times T \times 100 + 100^2) + 200 \\ &= 0,58T^2 - 200 \times 0,58T + 0,58 \times 10000 + 200 \\ &= 0,58T^2 - 116T + 6000 \\ &= R \end{aligned}$$

Donc $R = 0,58(T-100)^2 + 200$

b) On a la forme canonique: $\frac{0,58}{a}(T-100)^2 + \frac{200}{\beta}$

donc le minimum est $\beta = 200$, et il est atteint par $T = \alpha = 100$ €.

Ex 11.12 $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

a) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0$
(équation-produit) $S = \{0; -3\}$.

b) Le sommet de la parabole est sur l'axe de symétrie de celle-ci. Son abscisse sera donc la moyenne des deux valeurs précédentes, soit $\alpha = \frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2}$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{25}{4}$$

Trace: à faire à la calculatrice.